Est-il typique d'avoir des sous-espaces invariants?

(travail en commun avec S. Grivaux et Q. Menet)

Problème du sous-espace invariant (...)

X = Banach complexe séparable de dimension infinie

$\mathcal{B}(X) := \{\text{opérateurs bornés sur } X\}$

PSEI pour X. *Est-il vrai que pour tout $T \in \mathcal{B}(X)$, il existe un sous-espace fermé $E \subseteq X$ tel que $T(E) \subseteq E$ et $E \neq \{0\}, X$?*

- NON pour certains X (Enflo 1981); en particulier pour $X = \ell_1$ ou c_0 (Read 1985, 1989).
- OUI pour certains X (Argyros - Haydon 2009), et même pour certains X réflexifs (Argyros-Motakis 2014).
- ??? pour $X = \ell_p$, $1 < p < \infty$.

PSEI "générique". *Est-il au moins vrai que "la plupart" des $T \in \mathcal{B}(X)$ admettent un sous-espace invariant non-trivial?*

Propriétés typiques

$\mathcal{Z}$ espace topologique de Baire.

Si $\mathbf{P} = \mathbf{P}(z)$ est une propriété dépendant de $z \in \mathcal{Z}$, on dit qu'un $z \in \mathcal{Z}$ typique vérifie $\mathbf{P}$ si $\{z \in \mathcal{Z};\ \mathbf{P}(z)\}$ est comaigre dans $\mathcal{Z}$, *i.e.* contient un G_δ dense de $\mathcal{Z}$.

Exemple. *Un $T \in (\mathcal{B}(\ell_2), \|\cdot\|)$ typique admet des sous-espaces invariants non-triviaux, et même n'est pas cyclique : pour tout $x \in \ell_2$, on a $\overline{\mathrm{vect}}\,\{T^n x;\ n \geq 0\} \neq \ell_2$* (Fillmore-Stampfli-Williams 1972).
Raison : $\{T \in \mathcal{B}(\ell_2);\ \exists \mu \in \mathbb{C} : T - \mu$ est de Fredholm d'indice $-2\}$ est un ouvert dense de $(\mathcal{B}(\ell_2), \|\cdot\|)$.

Fin de l'exposé?

Une question qui nous a occupés.

"Topologie opératorielle forte" ($\mathtt{SOT}$) sur $\mathcal{B}(X)$:

$$T_i \xrightarrow{\mathtt{SOT}} T \iff T_i x \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx \quad \text{pour tout } x \in X.$$

☹ $(\mathcal{B}(X), \mathtt{SOT})$ n'est pas un espace de Baire (et n'est pas non plus métrisable).

$$\mathcal{B}_1(X) := \{T \in \mathcal{B}(X);\ \|T\| \le 1\}.$$

☺ $(\mathcal{B}_1(X), \mathtt{SOT})$ est un espace polonais (= séparable et complètement métrisable).

Question. $1 \le p < \infty$. *Est-il vrai qu'un* $T \in (\mathcal{B}_1(\ell_p), \mathtt{SOT})$ *typique admet un sous-espace invariant non-trivial?*

Espoir initial. Pour un $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{B}(\ell_2)$ convenablement choisi, un $T \in (\mathcal{Z}, \mathtt{SOT})$ typique n'admet pas de sous-espace invariant non-trivial.

Quand est-on certain qu'un $T \in \mathcal{B}_1(X)$ a des sous-espaces invariants non-triviaux?

- Quand T a des valeurs propres.

- Quand T commute avec un opérateur compact $K \neq 0$ (Lomonosov 1973).

- Quand T est une isométrie (Godement 1948). Pour X réflexif, quand T^* est une isométrie.

- Pour $X = \ell_2$, quand $\sigma(T) \supseteq \mathbb{T}$ (Brown-Chevreau-Pearcy 1988).

- Pour X Banach quelconque, quand T est polynomialement borné ($\|P(T)\| \leq C \sup\{|P(z)|;\ |z| \leq 1\}$ pour tout polynôme P), que $\sigma(T) \supseteq \mathbb{T}$ et que $T^n x \to 0$ pour tout $x \in X$ (Ambrozie-Müller 2004).

Le spectre est typiquement maximal

Proposition. *Pour tout $1 \leq p < \infty$, un $T \in \mathcal{B}_1(\ell_p)$ typique vérifie $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$.*

Corollaire. Un $T \in \mathcal{B}_1(\ell_2)$ typique admet un sous-espace invariant non-trivial.

Preuve. Brown-Chevreau-Pearcy.

Le spectre est typiquement maximal : preuve

$$\mathcal{G} := \{T \in \mathcal{B}_1(\ell_p);\ \forall \lambda \in \overline{\mathbb{D}}\ :\ T - \lambda \text{ n'est pas un plongement}\}.$$

- $T \in \mathcal{G} \implies \sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$.
- $\mathcal{G}$ est G_δ (*i.e.* $\mathcal{B}_1(\ell_p) \setminus \mathcal{G}$ est F_σ):

$$T \notin \mathcal{G} \iff \exists \lambda \in \overline{\mathbb{D}}\ :\ \Big(\exists k \in \mathbb{N}\ \forall x \in \ell_p\ :\ \|(T-\lambda)x\| \geq 2^{-k}\|x\|\Big).$$

$\big\{(T,\lambda);\ \exists k \in \mathbb{N}\cdots\big\}$ est F_σ dans $\mathcal{B}_1(\ell_p) \times \overline{\mathbb{D}}$, et $\overline{\mathbb{D}}$ est compact $\rightsquigarrow$ OK.

- $\mathcal{G}$ est dense dans $\mathcal{B}_1(\ell_p)$:

$(e_j)_{j\geq 0}$ base canonique de ℓ_p

$P_N :=$ projection canonique sur $E_N := [e_0, \ldots, e_N]$

$B_N :=$ backward shift sur $[e_j;\ j > N] \sim \ell_p$

$T \in \mathcal{B}_1(\ell_p)$ quelconque.

$$T_N := P_N T_{|E_N} \oplus B_N \in \mathcal{B}_1(\ell_p).$$

$T_N \in \mathcal{G}$ car "$B_N \in \mathcal{G}$"; et $T_N \xrightarrow{\texttt{SOT}} T$.

Le cas $X = \ell_2$ est non-trivialement "trivial"

$$H := \ell_2(\mathbb{N}, \ell_2)$$
$$B_\infty : H \to H$$
$$B_\infty(x_0, x_1, x_2, \dots) := (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Théorème. (Eisner-Matrai 2013)
Un $T \in \mathcal{B}_1(\ell_2)$ typique est unitairement équivalent à B_∞.

Corollaire. *Un $T \in \mathcal{B}_1(\ell_2)$ typique admet des valeurs propres, mais ne commute avec aucun opérateur compact $K \neq 0$.*

Preuve. Il suffit de le voir pour $T = B_\infty =: B$.
- Valeurs propres : OK (tout $\lambda \in \mathbb{D}$ est valeur propre de B).
- Soit $K \in \mathcal{B}(X)$ compact tel que $KB = BK$. Comme $B^n x \to 0$ pour tout $x \in \ell_2$ et que K est compact, $\|B^n K\| \to 0$. Donc $\|KB^n\| \to 0$ puisque $B^n K = KB^n$, et donc $\|B^{*n} K^*\| \to 0$. Mais $\|B^{*n} K^*\| = \|K\|$ car B^* est une isométrie; donc $K = 0$.

Preuve d'Eisner-Matrai

Grâce à la décomposition de Wold, il suffit de montrer qu'un $T \in \mathcal{B}_1(\ell_2)$ typique possède les propriétés suivantes :

- T^* est une isométrie;
- $\dim \ker(T) = \infty$;
- $T^n x \to 0$ pour tout $x \in \ell_2$.

Et par Baire, il suffit de montrer séparément que chacune de ces propriétés est typique.

Preuve d'Eisner-Matrai (suite)

Fait 1. $\mathcal{C}_{0\cdot}(X) := \{T \in \mathcal{B}_1(X);\ T^n x \to 0 \textit{ pour tout } x \in X\}$ *est un G_δ dense de $\mathcal{B}_1(X)$.*

Preuve. Si $T \in \mathcal{B}_1(X)$ et $x \in X$ alors $\|T^n x\|$ décroit; et donc $T^n x \to 0$ si et seulement si $\inf_n \|T^n x\| = 0$. Donc, si $D \subseteq X$ est un ensemble dénombrable dense, alors

$$T \in \mathcal{C}_{0\cdot}(X) \iff \forall z \in D\ \forall k \in \mathbb{N}\ :\ \Big(\exists n\ :\ \|T^n z\| < 2^{-k}\Big).$$

Donc $\mathcal{C}_{0\cdot}(X)$ est G_δ par continuité des applications $T \mapsto T^n z$ sur $\mathcal{B}_1(X)$. Et $\mathcal{C}_{0\cdot}(X)$ est dense car $\mathcal{C}_{0\cdot}(X) \supseteq \{T \in \mathcal{B}_1(X);\ \|T\| < 1\}$.

Preuve d'Eisner-Matrai (suite)

Fait 2.1. $\mathcal{I}_*(X) := \{T \in \mathcal{B}_1(X);\ T^* \text{ est une isométrie}\}$ *est* G_δ *dans* $\mathcal{B}_1(X)$.

Preuve. Si $T \in \mathcal{B}_1(X)$, alors

$$T \notin \mathcal{I}_*(X) \iff \exists x^* \in B_{X^*}\ :\ \Big(\exists \alpha \in \mathbb{Q}\ :\ \|T^*x^*\| \leq \alpha < \|x^*\|.\Big)$$

L'ensemble $\{(T, x^*);\ \|T^*x^*\| \leq \alpha\}$ est fermé dans $\mathcal{B}_1(X) \times (B_{X^*}, w^*)$; et l'ensemble $\{x^* \in B_{X^*};\ \|x^*\| > \alpha\}$ est ouvert dans (B_{X^*}, w^*), donc F_σ. Donc $\{(T, x^*);\ \exists\alpha \cdots\}$ est F_σ dans $\mathcal{B}_1(X) \times (B_{X^*}, w^*)$. Et donc $\mathcal{B}_1(X) \setminus \mathcal{I}_*(X)$ est F_σ par compacité de (B_{X^*}, w^*).

Preuve d'Eisner-Matrai (suite)

Fait 2.2. *$\mathcal{I}_*(\ell_2)$ est dense dans $\mathcal{B}_1(\ell_2)$.*

Preuve.

$$(e_n)_{n\geq 0} \text{ base canonique de } \ell_2$$
$$P_N := \text{projection orthogonale sur } [e_0, \ldots, e_N]$$
$$B : \ell_2 \to \ell_2 \quad \text{backward shift}$$
$$S : \ell_2 \to \ell_2 \quad \text{forward shift}$$

$T \in \mathcal{B}_1(\ell_2)$ quelconque. $A_N := TP_N$,

$$T_N := A_N + (I - A_N A_N^*)^{1/2} B^{N+1}.$$
$$T_N^* = A_N^* + S^{N+1}(I - A_N A_N^*)^{1/2}$$

T_N^* est une isométrie; et $T_N \xrightarrow{\mathtt{SOT}} T$.

Preuve d'Eisner-Matrai (fin)

"Rappel". $T \in \mathcal{B}(X)$ est supérieurement semi-Fredholm si T est à image fermée et $\dim\ker(T) < \infty$.

Fait 3. *Si $\mathcal{F}_1(X) := \{T \in \mathcal{B}_1(X)$ de rang fini$\}$ est dense dans $\mathcal{B}_1(X)$ – autrement dit, si X a la MAP – alors un $T \in \mathcal{B}_1(X)$ typique n'est pas supérieurement semi-Fredholm.*

Preuve. Soit $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}_1(X)$ défini comme suit :

$$T \in \mathcal{G} \iff \forall \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \Big(\exists E \subseteq X \text{ avec } \dim(E) > n\ :\ \|T_{|E}\| < \varepsilon\Big).$$

- $\mathcal{G}$ est G_δ car $\{T;\ \|T_{|E}\| < \varepsilon\}$ est ouvert dans $\mathcal{B}_1(X)$ si $\dim(E) < \infty$; et $\mathcal{G}$ est dense dans $\mathcal{B}_1(X)$ car $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}_1(X)$.
- $T \in \mathcal{G} \implies T$ n'est pas supérieurement semi-Fredholm.

Conséquence. *Si un $T \in \mathcal{B}_1(X)$ typique est surjectif (ce qui est vrai par exemple si T^* est une isométrie...), alors un $T \in \mathcal{B}_1(X)$ typique vérifie $\dim\ker(T) = \infty$.*

Le cas $X = \ell_1$

Théorème. *Un $T \in \mathcal{B}_1(\ell_1)$ typique est tel que T^* est une isométrie, $\dim\ker(T) = \infty$ et $T^n x \to 0$ pour tout $x \in X$.*

Preuve. Il suffit de montrer que $\mathcal{I}_*(\ell_1)$ est dense dans $\mathcal{B}_1(\ell_1)$.

$T \in \mathcal{B}_1(\ell_1)$ quelconque.

$$T_N := TP_N + B^{N+1}.$$

- $\|T_N e_j\| \leq 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}$; donc $T_N \in \mathcal{B}_1(\ell_1)$.
- Si $x^* \in \ell_\infty = \ell_1^*$, alors $\|T_N^* x^*\|_\infty \geq |\langle x^*, T_N e_{N+1+k}\rangle| = |\langle x^*, e_k\rangle|$ pour tout $k \geq 0$, donc $\|T_N^* x^*\|_\infty \geq \|x^*\|_\infty$; et donc $T_N \in \mathcal{I}_*(\ell_1)$.
- $T_N \xrightarrow{\texttt{SOT}} T$.

Corollaire. *Un $T \in \mathcal{B}_1(\ell_1)$ typique admet des valeurs propres mais ne commute avec aucun opérateur compact $K \neq 0$.*

Ennuis avec $p \neq 1, 2$

Proposition 1. *Si $1 < p < \infty$ et $p \neq 1, 2$, alors un $T \in \mathcal{B}_1(\ell_p)$ typique est tel que T^* n'est pas une isométrie.*

Preuve. Point clé : Si $S \in \mathcal{B}(\ell_q)$, $q \neq 2$ est une isométrie, alors S envoie des vecteurs à support disjoints sur des vecteurs à supports disjoints. Donc

$$\mathcal{I}_*(\ell_p) \subseteq \left\{ T \in \mathcal{B}_1(\ell_p);\ \forall j \in \mathbb{N}\ :\ \langle e_0^*, Te_j\rangle \langle e_1^*, Te_j\rangle = 0 \right\} =: \mathcal{F}.$$

$\mathcal{F}$ est fermé dans $\mathcal{B}_1(\ell_p)$, et d'intérieur vide. Donc $\mathcal{I}_*(\ell_p)$ est maigre (en fait, nulle part dense).

Proposition 2. *Si $1 \leq p < \infty$ et $p \neq 2$, alors un $T \in \mathcal{B}(\ell_p)$ typique n'est pas polynomialement borné.*

"Preuve". $\mathcal{G} := \{ T \in \mathcal{B}_1(\ell_p)$ pas polynomialement bornés$\}$ est G_δ (facile). Et on montre que $\mathcal{G}$ est dense en utilisant que le forward shift $S : \ell_p \to \ell_p$ n'est pas polynomialement borné.

Et les valeurs propres??

Une autre topologie sur $\mathcal{B}_1(X)$

X à dual séparable. On note $\mathtt{SOT}^*$ la topologie sur $\mathcal{B}(X)$ définie comme suit :

$$T_i \xrightarrow{\mathtt{SOT}^*} T \iff T_i \xrightarrow{\mathtt{SOT}} T \quad \text{et} \quad T_i^* \xrightarrow{\mathtt{SOT}} T^*.$$

- $\mathtt{SOT}^*$ est plus forte que $\mathtt{SOT}$.
- $(\mathcal{B}_1(X), \mathtt{SOT}^*)$ est polonais.
- Si X est réflexif, l'application $T \mapsto T^*$ est un homéomorphisme de $(\mathcal{B}_1(X), \mathtt{SOT}^*)$ sur $(\mathcal{B}_1(X^*), \mathtt{SOT}^*)$.
- Donc : si pour tout $1 < p < \infty$, un $T \in (\mathcal{B}_1(\ell_p), \mathtt{SOT}^*)$ typique vérifie une certaine propriété **P**, alors, pour tout $1 < p < \infty$, un $T \in (\mathcal{B}_1(\ell_p), \mathtt{SOT}^*)$ typique est tel que T^* vérifie **P**.

$\mathtt{SOT}^*$ et les valeurs propres

Rappel. Un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ est hypercyclique s'il existe $x \in X$ tel que $\{T^n x;\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X.

Proposition. *Pour tout $1 < p < \infty$, un $T \in (B_1(\ell_p), \mathtt{SOT}^*)$ typique est tel que $2T$ est hypercyclique.*
(Plus précisément, l'ensemble $\{T \in \mathcal{B}_1(\ell_p);\ 2T$ est hypercyclique$\}$ est $\mathtt{SOT}$-G_δ et $\mathtt{SOT}^*$-dense dans $\mathcal{B}_1(\ell_p)$.)

Corollaire. *Pour tout $1 < p < \infty$, un $T \in (B_1(\ell_p), \mathtt{SOT}^*)$ typique n'a pas de valeurs propres.*

Preuve. Si R est un opérateur hypercyclique, alors R^* n'a pas de valeurs propres.

Une surprise

Théorème. *Si $p > 2$, alors $(\mathcal{B}_1(\ell_p), \mathtt{SOT})$ et $(\mathcal{B}_1(\ell_p), \mathtt{SOT}^*)$ ont les mêmes ensembles (co)maigres.*

Corollaire. *Si $p > 2$, alors un $T \in (\mathcal{B}_1(\ell_p), \mathtt{SOT})$ typique n'a pas de valeurs propres.*

Formulation équivalente du théorème: les points de continuité de l'application $id : (\mathcal{B}_1(\ell_p), \mathtt{SOT}) \to (\mathcal{B}_1(\ell_p), \mathtt{SOT}^*)$ sont $\mathtt{SOT}^*$-denses dans $\mathcal{B}_1(\ell_p)$.

Questions “évidentes”

- Est-il vrai que $(\mathcal{B}_1(\ell_p), \texttt{SOT})$ et $(\mathcal{B}_1(\ell_p), \texttt{SOT}^*)$ ont les mêmes ensembles maigres si $1 < p < 2$?

- Est-il vrai qu'un $T \in \mathcal{B}_1(\ell_p)$ typique n'a pas de valeurs propres si $1 < p < 2$?

- Un $T \in \mathcal{B}_1(\ell_p)$ typique admet-il des sous-espaces invariants non-triviaux si $1 \leq p < \infty$ et $p \notin \{1, 2\}$? (!!)

- Y a-t-il une orbite de similarité comaigre dans $\mathcal{B}_1(\ell_1)$, *i.e.* existe-t-il un opérateur $A \in \mathcal{B}_1(\ell_1)$ tel que $\{P^{-1}AP;\ P \in GL(\ell_1)\} \cap \mathcal{B}_1(\ell_1)$ est comaigre dans $\mathcal{B}_1(\ell_1)$?

- Est-il vrai qu'un $T \in \mathcal{B}_1(\ell_p)$ typique ne commute avec aucun opérateur compact $K \neq 0$?

- Quelqu'un·e connait-il·elle des exemples intéressants d'espaces munis de 2 topologies polonaises naturelles ayant les mêmes ensembles maigres?