

Étude des propriétés dynamiques des opérateurs de Bishop

Vincent BÉHANI
sous la direction de Sophie GRIVAUX

Journées du GdR AFHP 2021

Laboratoire Paul Painlevé

28 septembre 2021

Table des matières

- 1 Introduction : Problème du sous-espace invariant
- 2 Propriétés dynamiques : hypercyclicité et supercyclicité
 - Hypercyclicité
 - Valeurs propres
 - Supercyclicité
- 3 Propriétés dynamiques : cyclicité
 - Cyclicité dans le cas rationnel
 - Cyclicité à partir du cas rationnel

Rappel du plan

- 1 Introduction : Problème du sous-espace invariant
- 2 Propriétés dynamiques : hypercyclicité et supercyclicité
 - Hypercyclicité
 - Valeurs propres
 - Supercyclicité
- 3 Propriétés dynamiques : cyclicité
 - Cyclicité dans le cas rationnel
 - Cyclicité à partir du cas rationnel

Problème du sous-espace invariant

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe, séparable et de dimension infinie.

Tout opérateur borné $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ possède-t-il un sous-espace fermé invariant non trivial, c'est-à-dire un sous-espace fermé $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ tel que $T(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ et tel que $\mathcal{F} \neq \{0\}$ et $\mathcal{F} \neq \mathcal{H}$?

Opérateurs de Bishop

Pour tout $\alpha \in [0, 1]$, on définit l'opérateur de Bishop

$$T_\alpha: \begin{array}{ccc} L^2([0, 1]) & \rightarrow & L^2([0, 1]) \\ f & \mapsto & T_\alpha f: \end{array} \left| \begin{array}{ccc} [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & xf(\{x + \alpha\}) \end{array} \right.$$

où $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$ désigne la partie fractionnaire d'un réel $y \in \mathbb{R}$.

Opérateurs de Bishop

Pour tout $\alpha \in [0, 1]$, on définit l'opérateur de Bishop

$$T_\alpha: \begin{array}{ccc} L^2([0, 1]) & \rightarrow & L^2([0, 1]) \\ f & \mapsto & T_\alpha f: \end{array} \left| \begin{array}{ccc} [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & xf(\{x + \alpha\}) \end{array} \right.$$

où $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$ désigne la partie fractionnaire d'un réel $y \in \mathbb{R}$.

Pour tout $f \in L^2([0, 1])$, pour presque tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $q \in \mathbb{N}$

$$T_\alpha^q f(x) = x \cdot \{x + \alpha\} \cdot \dots \cdot \{x + (q-1)\alpha\} f(\{x + q\alpha\}).$$

Sous-espace hyperinvariant

Définition

Un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ admet un sous-espace hyperinvariant non trivial s'il existe un sous-espace fermé invariant non trivial commun à tous les opérateurs commutant avec T .

Sous-espace hyperinvariant

Définition

Un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ admet un sous-espace hyperinvariant non trivial s'il existe un sous-espace fermé invariant non trivial commun à tous les opérateurs commutant avec T .

- Si $\alpha \in]0, 1[\cap \mathbb{Q}$ alors T_α admet un sous-espace hyperinvariant non trivial.

Sous-espace hyperinvariant

Définition

Un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ admet un sous-espace hyperinvariant non trivial s'il existe un sous-espace fermé invariant non trivial commun à tous les opérateurs commutant avec T .

- Si $\alpha \in]0, 1[\cap \mathbb{Q}$ alors T_α admet un sous-espace hyperinvariant non trivial.
- Davie : Si $\alpha \in]0, 1[$ est irrationnel et n'est pas un nombre de Liouville, alors T_α admet un sous-espace hyperinvariant non trivial.

Sous-espace hyperinvariant

Définition

Un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ admet un sous-espace hyperinvariant non trivial s'il existe un sous-espace fermé invariant non trivial commun à tous les opérateurs commutant avec T .

- Si $\alpha \in]0, 1[\cap \mathbb{Q}$ alors T_α admet un sous-espace hyperinvariant non trivial.
- Davie : Si $\alpha \in]0, 1[$ est irrationnel et n'est pas un nombre de Liouville, alors T_α admet un sous-espace hyperinvariant non trivial.
- Flattot : Il existe des nombres de Liouville tels que T_α admet un sous-espace hyperinvariant non trivial.

Sous-espace invariant et propriétés dynamiques

Proposition

Un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ n'admet pas de sous-espace invariant non trivial si et seulement si le sous-espace

$$\text{vect}\{T^n x; n \in \mathbf{N}\}$$

est dense dans $\mathcal{H}$ pour tout vecteur $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$.

Sous-espace invariant et propriétés dynamiques

Proposition

Un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ n'admet pas de sous-espace invariant non trivial si et seulement si le sous-espace

$$\text{vect}\{T^n x; n \in \mathbf{N}\}$$

est dense dans $\mathcal{H}$ pour tout vecteur $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$.

Intéressons-nous aux propriétés dynamiques des opérateurs de Bishop qui concernent le comportement des itérées

$$T_\alpha^0, T_\alpha^1, T_\alpha^2, T_\alpha^3, \dots$$

Rappel du plan

- 1 Introduction : Problème du sous-espace invariant
- 2 Propriétés dynamiques : hypercyclicité et supercyclicité
 - Hypercyclicité
 - Valeurs propres
 - Supercyclicité
- 3 Propriétés dynamiques : cyclicité
 - Cyclicité dans le cas rationnel
 - Cyclicité à partir du cas rationnel

Définitions dynamiques

Définition

Un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est dit :

- i. hypercyclique s'il existe $x \in \mathcal{H}$ tel que

$$\overline{\{T^n x; n \in \mathbf{N}\}} = \mathcal{H};$$

Définitions dynamiques

Définition

Un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est dit :

- i. hypercyclique s'il existe $x \in \mathcal{H}$ tel que

$$\overline{\{T^n x; n \in \mathbf{N}\}} = \mathcal{H};$$

- ii. supercyclique s'il existe $x \in \mathcal{H}$ tel que

$$\overline{\{\mu T^n x; \mu \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{N}\}} = \mathcal{H};$$

Définitions dynamiques

Définition

Un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est dit :

- i. hypercyclique s'il existe $x \in \mathcal{H}$ tel que

$$\overline{\{T^n x; n \in \mathbf{N}\}} = \mathcal{H};$$

- ii. supercyclique s'il existe $x \in \mathcal{H}$ tel que

$$\overline{\{\mu T^n x; \mu \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{N}\}} = \mathcal{H};$$

- iii. cyclique s'il existe $x \in \mathcal{H}$ tel que

$$\overline{\text{vect}\{T^n x; n \in \mathbf{N}\}} = \overline{\{p(T)x; p \in \mathbf{C}[X]\}} = \mathcal{H}.$$

Hypercyclicité

Proposition

Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, l'opérateur T_α n'est pas hypercyclique.

Hypercyclicité

Proposition

Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, l'opérateur T_α n'est pas hypercyclique.

$$\forall f \in L^2([0, 1]), \quad \|T_\alpha f\|^2 = \int_0^1 |xf(\{x + \alpha\})|^2 dx \leq \|f\|^2.$$

Ainsi $\|T_\alpha\| \leq 1$, donc pour tout $f \in L^2([0, 1])$ et tout $n \in \mathbf{N}$

$$\|T_\alpha^n f\| \leq \|T_\alpha\|^n \|f\| \leq \|f\|.$$

Toute orbite est donc bornée, ainsi T_α n'est pas hypercyclique.

Valeurs propres de l'opérateur de Bishop

Théorème

Si $\alpha \in]0, 1[$, alors $\sigma_p(T_\alpha) = \sigma_p(T_\alpha^*) = \emptyset$.

Valeurs propres de l'opérateur de Bishop

Théorème

Si $\alpha \in]0, 1[$, alors $\sigma_p(T_\alpha) = \sigma_p(T_\alpha^*) = \emptyset$.

Soit $\alpha = p/q$ tel que p et q soient premiers entre eux et $0 < p < q$.

Valeurs propres de l'opérateur de Bishop

Théorème

Si $\alpha \in]0, 1[$, alors $\sigma_p(T_\alpha) = \sigma_p(T_\alpha^*) = \emptyset$.

Soit $\alpha = p/q$ tel que p et q soient premiers entre eux et $0 < p < q$.

Pour tout $f \in L^2([0, 1])$ et tout $\mu \in \mathbb{C}$

$$T_\alpha f = \mu f \implies T_\alpha^q f = \mu^q f$$

$$\implies x \cdot \{x + p/q\} \cdot \dots \cdot \{x + (q-1)p/q\} f(x) = \mu^q f(x) \text{ p.p.}$$

$$\implies x \cdot \{x + 1/q\} \cdot \dots \cdot \{x + (q-1)/q\} = \mu^q \text{ p.p. sur } \{f \neq 0\}$$

$$\implies \lambda(\{f \neq 0\}) = 0$$

Valeurs propres de l'opérateur de Bishop

Théorème

Si $\alpha \in]0, 1[$, alors $\sigma_p(T_\alpha) = \sigma_p(T_\alpha^*) = \emptyset$.

Soit $\alpha = p/q$ tel que p et q soient premiers entre eux et $0 < p < q$.

Pour tout $f \in L^2([0, 1])$ et tout $\mu \in \mathbb{C}$

$$T_\alpha f = \mu f \implies T_\alpha^q f = \mu^q f$$

$$\implies x \cdot \{x + p/q\} \cdot \dots \cdot \{x + (q-1)p/q\} f(x) = \mu^q f(x) \text{ p.p.}$$

$$\implies x \cdot \{x + 1/q\} \cdot \dots \cdot \{x + (q-1)/q\} = \mu^q \text{ p.p. sur } \{f \neq 0\}$$

$$\implies \lambda(\{f \neq 0\}) = 0$$

car $w: x \mapsto x \cdot \{x + 1/q\} \cdot \dots \cdot \{x + (q-1)/q\}$ est $1/q$ -périodique et strictement croissante sur $[0, 1/q[$.

Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, il existe une suite de rationnels $(p_n/q_n)_{n \geq 1}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty$ et $|\alpha - p_n/q_n| \leq q_n^{-2}$ pour tout $n \geq 1$.

Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, il existe une suite de rationnels $(p_n/q_n)_{n \geq 1}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty$ et $|\alpha - p_n/q_n| \leq q_n^{-2}$ pour tout $n \geq 1$.
Pour tout $f \in L^2([0, 1])$, tout $\mu \neq 0$ et tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} T_\alpha f = \mu f &\implies T_\alpha^{q_n} f = \mu^{q_n} f \\ &\implies f(\{x - q_n \alpha\}) = \frac{1}{\mu^{q_n}} \{x - q_n \alpha\} \cdot \dots \cdot \{x - \alpha\} f(x) \text{ p.p.} \\ &\implies f(\{x - q_n \alpha\}) = F_n(x) f(x) \text{ p.p.} \\ &\implies |f(x)| = \frac{|f(x) - f(\{x - q_n \alpha\})|}{|1 - F_n(x)|} \text{ p.p.} \end{aligned}$$

Or $f - f(\{\cdot - q_n \alpha\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ en mesure,

Or $f - f(\{\cdot - q_n \alpha\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ en mesure, ainsi quitte à prendre une sous-suite $(q_{n_k})_{k \geq 1}$ on a

$$\forall n \geq 1, \quad \lambda \left(\left\{ x \in [0, 1]; \quad |f(x) - f(\{x - q_n \alpha\})| < \frac{1}{2n} \right\} \right) \geq \frac{5}{6}.$$

Or $f - f(\{\cdot - q_n \alpha\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ en mesure, ainsi quitte à prendre une sous-suite $(q_{n_k})_{k \geq 1}$ on a

$$\forall n \geq 1, \quad \lambda \left(\left\{ x \in [0, 1]; \quad |f(x) - f(\{x - q_n \alpha\})| < \frac{1}{2n} \right\} \right) \geq \frac{5}{6}.$$

On peut aussi montrer par convexité que

$$\forall n \geq 1, \quad \lambda \left(\left\{ x \in [0, 1]; \quad |1 - F_n(x)| > \frac{1}{2} \right\} \right) \geq 1/3.$$

Or $f - f(\{\cdot - q_n \alpha\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ en mesure, ainsi quitte à prendre une sous-suite $(q_{n_k})_{k \geq 1}$ on a

$$\forall n \geq 1, \quad \lambda \left(\left\{ x \in [0, 1]; \quad |f(x) - f(\{x - q_n \alpha\})| < \frac{1}{2n} \right\} \right) \geq \frac{5}{6}.$$

On peut aussi montrer par convexité que

$$\forall n \geq 1, \quad \lambda \left(\left\{ x \in [0, 1]; \quad |1 - F_n(x)| > \frac{1}{2} \right\} \right) \geq 1/3.$$

Ainsi $\lambda(\{|f| < 1/n\}) \geq 5/6 + 1/3 - 1 = 1/6$ pour tout $n \geq 1$.

Or $f - f(\{\cdot - q_n \alpha\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ en mesure, ainsi quitte à prendre une sous-suite $(q_{n_k})_{k \geq 1}$ on a

$$\forall n \geq 1, \quad \lambda \left(\left\{ x \in [0, 1]; \quad |f(x) - f(\{x - q_n \alpha\})| < \frac{1}{2n} \right\} \right) \geq \frac{5}{6}.$$

On peut aussi montrer par convexité que

$$\forall n \geq 1, \quad \lambda \left(\left\{ x \in [0, 1]; \quad |1 - F_n(x)| > \frac{1}{2} \right\} \right) \geq 1/3.$$

Ainsi $\lambda(\{|f| < 1/n\}) \geq 5/6 + 1/3 - 1 = 1/6$ pour tout $n \geq 1$.

Alors $\lambda(\{f = 0\}) \geq 1/6$.

Or $f - f(\{\cdot - q_n \alpha\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ en mesure, ainsi quitte à prendre une sous-suite $(q_{n_k})_{k \geq 1}$ on a

$$\forall n \geq 1, \quad \lambda \left(\left\{ x \in [0, 1]; \quad |f(x) - f(\{x - q_n \alpha\})| < \frac{1}{2n} \right\} \right) \geq \frac{5}{6}.$$

On peut aussi montrer par convexité que

$$\forall n \geq 1, \quad \lambda \left(\left\{ x \in [0, 1]; \quad |1 - F_n(x)| > \frac{1}{2} \right\} \right) \geq 1/3.$$

Ainsi $\lambda(\{|f| < 1/n\}) \geq 5/6 + 1/3 - 1 = 1/6$ pour tout $n \geq 1$.

Alors $\lambda(\{f = 0\}) \geq 1/6$.

Puisque $T_\alpha f = \mu f$, alors $\{f = 0\}$ est α -stable et par ergodicité de $x \mapsto \{x + \alpha\}$ on a $f = 0$ dans $L^2([0, 1])$.

Supercyclicité

Proposition

Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, l'opérateur T_α n'est pas supercyclique.

Supercyclicité

Proposition

Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, l'opérateur T_α n'est pas supercyclique.

Pour démontrer cela, utilisons le théorème et le lemme suivants.

Théorème (de la supercyclicité positive)

Soit un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si $\sigma_p(T^*) = \emptyset$, alors pour tout $f \in L^2([0, 1])$

$$\overline{\{\mu T^n f; \mu \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{H} \iff \overline{\{a T^n f; a > 0, n \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{H}.$$

Lemme

Si $A \subset L^2([0, 1])$ est dense dans $L^2([0, 1])$, alors l'ensemble $\{\lambda(\{\Re(f) > 0\}); f \in A\}$ est dense dans $[0, 1]$.

Lemme

Si $A \subset L^2([0, 1])$ est dense dans $L^2([0, 1])$, alors l'ensemble $\{\lambda(\{\Re(f) > 0\}); f \in A\}$ est dense dans $[0, 1]$.

Or pour tout $f \in L^2([0, 1])$, tout $n \in \mathbf{N}$, tout $a > 0$ et presque tout $x \in [0, 1]$

$$\Re(aT_\alpha^n f)(x) = ax \cdot \{x + \alpha\} \cdot \dots \cdot \{x + (n-1)\alpha\} \Re(f)(\{x + n\alpha\}).$$

Donc $\lambda(\{\Re(aT_\alpha^n f) > 0\}) = \lambda(\{\Re(f) > 0\})$.

Lemme

Si $A \subset L^2([0, 1])$ est dense dans $L^2([0, 1])$, alors l'ensemble $\{\lambda(\{\Re(f) > 0\}); f \in A\}$ est dense dans $[0, 1]$.

Or pour tout $f \in L^2([0, 1])$, tout $n \in \mathbf{N}$, tout $a > 0$ et presque tout $x \in [0, 1]$

$$\Re(aT_\alpha^n f)(x) = ax \cdot \{x + \alpha\} \cdot \dots \cdot \{x + (n-1)\alpha\} \Re(f)(\{x + n\alpha\}).$$

Donc $\lambda(\{\Re(aT_\alpha^n f) > 0\}) = \lambda(\{\Re(f) > 0\})$.

Ainsi l'ensemble $\{\lambda(\{\Re(aT_\alpha^n f) > 0\}); a > 0, n \in \mathbf{N}\}$ est un singleton et n'est donc pas dense dans $[0, 1]$.

Finalement T_α ne peut pas être supercyclique.

Rappel du plan

- 1 Introduction : Problème du sous-espace invariant
- 2 Propriétés dynamiques : hypercyclicité et supercyclicité
 - Hypercyclicité
 - Valeurs propres
 - Supercyclicité
- 3 Propriétés dynamiques : cyclicité
 - Cyclicité dans le cas rationnel
 - Cyclicité à partir du cas rationnel

Cyclicité dans le cas rationnel

Théorème

Soit $\alpha = p/q$ tel que $p \wedge q = 1$ et $0 < p < q$.

Une fonction $f \in L^2([0, 1])$ est cyclique pour T_α si et seulement si la fonction $\Delta(f, p/q)$ définie pour presque tout $t \in [0, 1]$ par

$$\begin{vmatrix} T_\alpha^0 f(t) & \dots & T_\alpha^{q-1} f(t) \\ T_\alpha^0 f(\{t + p/q\}) & \dots & T_\alpha^{q-1} f(\{t + p/q\}) \\ \vdots & & \vdots \\ T_\alpha^0 f(\{t + (q-1)p/q\}) & \dots & T_\alpha^{q-1} f(\{t + (q-1)p/q\}) \end{vmatrix}$$

vérifie $\lambda(\{t \in [0, 1]; \Delta(f, p/q)(t) = 0\}) = 0$.

Remarque : $|\Delta(f, p/q)|$ est $1/q$ -périodique.

Vecteurs cycliques dans le cas rationnel

Proposition

La fonction **1** constante égale à 1 est cyclique pour T_α pour tout $\alpha \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$.

Vecteurs cycliques dans le cas rationnel

Proposition

La fonction **1** constante égale à 1 est cyclique pour T_α pour tout $\alpha \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$.

Soit $\alpha = p/q$ tel que p et q soient premiers entre eux et $0 < p < q$.

Pour tout $t \in [0, 1/q[, \Delta(1, p/q)(t)$ vaut

$$\begin{vmatrix} 1 & t & \cdots & t \dots (t + \{(q-2)p/q\}) \\ 1 & t + \{p/q\} & \cdots & (t + \{p/q\}) \dots (t + \{(q-1)p/q\}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t + \{(q-1)p/q\} & \cdots & (t + \{(q-1)p/q\}) t \dots (t + \{(q-3)p/q\}) \end{vmatrix}.$$

La fonction $\Delta(1, p/q)$ est polynomiale sur $[0, 1/q[$.

$$\begin{aligned}\lambda_{[0,1]}(\{\Delta(\mathbf{1}, p/q) = 0\}) > 0 &\iff \lambda_{[0,1]}(\{|\Delta(\mathbf{1}, p/q)| = 0\}) > 0 \\ &\iff \lambda_{[0,1/q[}(\{|\Delta(\mathbf{1}, p/q)| = 0\}) > 0 \\ &\iff \lambda_{[0,1/q[}(\{\Delta(\mathbf{1}, p/q) = 0\}) > 0 \\ &\iff \forall t \in [0, 1/q[, \quad \Delta(\mathbf{1}, p/q)(t) = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_{[0,1]}(\{\Delta(\mathbf{1}, p/q) = 0\}) > 0 &\iff \lambda_{[0,1]}(\{|\Delta(\mathbf{1}, p/q)| = 0\}) > 0 \\
 &\iff \lambda_{[0,1/q[}(\{|\Delta(\mathbf{1}, p/q)| = 0\}) > 0 \\
 &\iff \lambda_{[0,1/q[}(\{\Delta(\mathbf{1}, p/q) = 0\}) > 0 \\
 &\iff \forall t \in [0, 1/q[, \quad \Delta(\mathbf{1}, p/q)(t) = 0.
 \end{aligned}$$

Or en permutant les lignes, on a

$$\begin{aligned}
 |\Delta(\mathbf{1}, \alpha)(0)| &= \det \begin{vmatrix} 1 & \{p/q\} & \cdots & \{p/q\} \cdot \dots \cdot \{(q-1)p/q\} \\ 1 & \{2p/q\} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \{(q-1)p/q\} & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \prod_{1 \leq k \leq q-1} \{(q-k)p/q\} \dots \{(q-1)p/q\} \neq 0.
 \end{aligned}$$

Vecteurs cycliques dans le cas rationnel

Proposition

Toute fonction f holomorphe sur un voisinage ouvert de $[0, 1]$ vérifiant $f(0) \neq 0$ est cyclique pour T_α pour tout $\alpha \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$.

Vecteurs cycliques dans le cas rationnel

Proposition

Toute fonction f holomorphe sur un voisinage ouvert de $[0, 1]$ vérifiant $f(0) \neq 0$ est cyclique pour T_α pour tout $\alpha \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$.

Soit $\alpha = p/q$ tel que p et q soient premiers entre eux et $0 < p < q$.

La fonction $\Delta(f, p/q)$ est holomorphe sur $]0, 1/q[$ et continue à droite en 0.

Vecteurs cycliques dans le cas rationnel

Proposition

Toute fonction f holomorphe sur un voisinage ouvert de $[0, 1]$ vérifiant $f(0) \neq 0$ est cyclique pour T_α pour tout $\alpha \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$.

Soit $\alpha = p/q$ tel que p et q soient premiers entre eux et $0 < p < q$.

La fonction $\Delta(f, p/q)$ est holomorphe sur $]0, 1/q[$ et continue à droite en 0. De même

$$\begin{aligned} f \text{ n'est pas cyclique} &\iff \lambda_{]0, 1/q[}(\{\Delta(f, p/q) = 0\}) > 0 \\ &\iff \forall t \in [0, 1/q[, \quad \Delta(f, p/q)(t) = 0. \end{aligned}$$

Vecteurs cycliques dans le cas rationnel

Proposition

Toute fonction f holomorphe sur un voisinage ouvert de $[0, 1]$ vérifiant $f(0) \neq 0$ est cyclique pour T_α pour tout $\alpha \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$.

Soit $\alpha = p/q$ tel que p et q soient premiers entre eux et $0 < p < q$.

La fonction $\Delta(f, p/q)$ est holomorphe sur $]0, 1/q[$ et continue à droite en 0. De même

$$\begin{aligned} f \text{ n'est pas cyclique} &\iff \lambda_{]0, 1/q[}(\{\Delta(f, p/q) = 0\}) > 0 \\ &\iff \forall t \in [0, 1/q[, \quad \Delta(f, p/q)(t) = 0. \end{aligned}$$

Or

$$|\Delta(f, p/q)(0)| = f(0)^q \prod_{1 \leq k \leq q-1} \{(q-k)p/q\} \dots \{(q-1)p/q\} \neq 0.$$

Cyclicité

Théorème

Soit un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si $\sigma_p(T^*) = \emptyset$, alors

T est cyclique

si et seulement si pour tout couple (U, V) d'ouverts non vides de $\mathcal{H}$, il existe $p \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$p(T)(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Dans ce cas l'ensemble des vecteurs cycliques est un G_δ dense de $\mathcal{H}$, c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts dense dans $\mathcal{H}$.

À partir du cas rationnel

Proposition

L'ensemble $\{\alpha \in [0, 1]; T_\alpha \text{ est cyclique}\}$ est co-maigre dans $[0, 1]$, c'est-à-dire qu'il contient un G_δ dense.

À partir du cas rationnel

Proposition

L'ensemble $\{\alpha \in [0, 1]; T_\alpha \text{ est cyclique}\}$ est co-maigre dans $[0, 1]$, c'est-à-dire qu'il contient un G_δ dense.

Montrons que

$$A = \{(\alpha, f) \in [0, 1] \times L^2([0, 1]); f \text{ est cyclique pour } T_\alpha\}$$

est un G_δ dense de $[0, 1] \times L^2([0, 1])$.

À partir du cas rationnel

Proposition

L'ensemble $\{\alpha \in [0, 1]; T_\alpha \text{ est cyclique}\}$ est co-maigre dans $[0, 1]$, c'est-à-dire qu'il contient un G_δ dense.

Montrons que

$$A = \{(\alpha, f) \in [0, 1] \times L^2([0, 1]); f \text{ est cyclique pour } T_\alpha\}$$

est un G_δ dense de $[0, 1] \times L^2([0, 1])$.

Densité :

Si U ouvert non vide de $[0, 1]$, il existe $\alpha \in \mathbb{Q} \cap U$ tel que T_α est cyclique.

À partir du cas rationnel

Proposition

L'ensemble $\{\alpha \in [0, 1]; T_\alpha \text{ est cyclique}\}$ est co-maigre dans $[0, 1]$, c'est-à-dire qu'il contient un G_δ dense.

Montrons que

$$A = \{(\alpha, f) \in [0, 1] \times L^2([0, 1]); f \text{ est cyclique pour } T_\alpha\}$$

est un G_δ dense de $[0, 1] \times L^2([0, 1])$.

Densité :

Si U ouvert non vide de $[0, 1]$, il existe $\alpha \in \mathbb{Q} \cap U$ tel que T_α est cyclique.

Si V ouvert non vide de $L^2([0, 1])$, il existe $f \in V$ cyclique pour T_α , d'où $(\alpha, f) \in A \cap U \times V$.

G_δ :

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base d'ouverts de $L^2([0, 1])$.

G_δ :

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base d'ouverts de $L^2([0, 1])$.

Si $\alpha \in [0, 1]$, l'ensemble des vecteurs cycliques de T_α est

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \in \mathbb{C}[X]} p(T_\alpha)^{-1}(U_n).$$

G_δ :

Soit $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une base d'ouverts de $L^2([0, 1])$.

Si $\alpha \in [0, 1]$, l'ensemble des vecteurs cycliques de T_α est

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \bigcup_{p \in \mathbf{C}[X]} p(T_\alpha)^{-1}(U_n).$$

Donc pour tout $(\alpha, f) \in [0, 1] \times L^2([0, 1])$

$$\begin{aligned} (\alpha, f) \in A &\iff \forall n \in \mathbf{N}, \exists p \in \mathbf{C}[X], \quad p(T_\alpha)f \in U_n \\ &\iff (\alpha, f) \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \bigcup_{p \in \mathbf{C}[X]} \phi_p^{-1}(U_n) \end{aligned}$$

où $\phi_p : (\alpha, f) \mapsto p(T_\alpha)f$ est continue.

Théorème de Kuratowski-Ulam

Théorème

Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert séparables.

Si un ensemble $A \subset \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ est co-maigre dans $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, alors les ensembles

$$\{x \in \mathcal{H}_1; \{y \in \mathcal{H}_2; (x, y) \in A\} \text{ est co-maigre dans } \mathcal{H}_2\}$$

et

$$\{y \in \mathcal{H}_2; \{x \in \mathcal{H}_1; (x, y) \in A\} \text{ est co-maigre dans } \mathcal{H}_1\}$$

sont respectivement co-maigres dans $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$.

Pour

$$A = \{(\alpha, f) \in [0, 1] \times L^2([0, 1]); f \text{ est cyclique pour } T_\alpha\},$$

l'ensemble

$$\begin{aligned} & \{\alpha \in [0, 1]; \{f \in L^2([0, 1]); (\alpha, f) \in A\} \text{ est co-maigre dans } L^2([0, 1])\} \\ &= \{\alpha \in [0, 1]; \{f \in L^2([0, 1]); f \text{ est cyclique pour } T_\alpha\} \text{ est co-maigre}\} \\ &= \{\alpha \in [0, 1]; T_\alpha \text{ est cyclique}\} \end{aligned}$$

est co-maigre dans $[0, 1]$.

Merci de votre attention !

-  F. BAYART, E. MATHERON, *Dynamics of linear operators*. Camb. Univ. Press. (2009).
-  I. CHALENDAR, J. R. PARTINGTON, *Modern approaches to the invariant-subspace problem*. Camb. Univ. Press. (2011).
-  F. CHAMIZO, E. A. GALLARDO-GUTIÉRREZ, M. MONSALVE-LÓPEZ, A. UBIS, *Invariant Subspaces for Bishop operators and beyond*. Advan. in Math. **375** (2020).
-  A. M. DAVIE, *Invariant subspaces for Bishop's operators*. Bull. Lond. Math. Soc. **6** (1974), 343 - 348.
-  A. FLATTOT, *Hyperinvariant subspaces for Bishop-type operators*. Acta Sci. Math. **74** (2008).
-  A. S. KECHRIS, *Classical Descriptive Set Theory*. Sprin.-Verl. (1995).