Spectre des opérateurs de composition pondérés : le cas des rotations

Benjamin Célariès

Université Gustave Eiffel - Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées

29 septembre 2021

Opérateurs de composition pondérés

But : Étude des opérateurs de composition pondérés sur l'espace de Fréchet $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$

Opérateurs de composition pondérés

But : Étude des opérateurs de composition pondérés sur l'espace de Fréchet $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$

Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphe.
Soit $m : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorphe.

Opérateurs de composition pondérés

But : Étude des opérateurs de composition pondérés sur l'espace de Fréchet $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$

Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphe.
Soit $m : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorphe.

Un opérateur de composition pondéré est un opérateur de la forme

$$T_{m,\varphi} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \\ f & \longmapsto & (z \mapsto m(z)\ f(\varphi(z))) \end{array} \right.$$

Contexte

Cas des opérateurs de composition ($m = 1$)

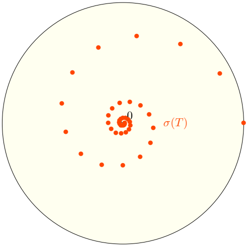
Contexte

Cas des opérateurs de composition ($m = 1$)

Théorème (W. Arendt, B. C., I. Chalendar (2019))

Soit φ elliptique qui n'est pas un automorphisme. On suppose que $\varphi(0) = 0$ *et* $\left|\varphi'(0)\right| \in]0;1[$.

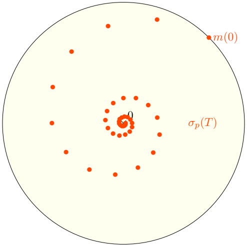
1. $\sigma_p(C_\varphi) = \left\{\varphi'(0)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$;
2. $\sigma(C_\varphi) = \sigma_p(C_\varphi) \cup \{0\}$.



Théorème (W. Arendt, E. Bernard, B. C., I. Chalendar (2021))

Soit φ elliptique qui n'est pas un automorphisme. On suppose que $\varphi(0) = 0$, que $\left|\varphi'(0)\right| \in]0;1[$ et que $m(0) \neq 0$.

1. $\sigma_p(T) = \left\{m(0)\ \varphi'(0)^n \ \middle|\ n \in \mathbb{N}\right\}$;
2. $\sigma(T) = \sigma_p(C_\varphi) \cup \{0\}$.



Question : Quid des automorphismes elliptiques ?

Question : Quid des automorphismes elliptiques ?

On dit que $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est :

Question : Quid des automorphismes elliptiques ?

On dit que $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est :

- elliptique s'il existe $\alpha \in \mathbb{D}$ tel que $\varphi(\alpha) = \alpha$;

Question : Quid des automorphismes elliptiques ?

On dit que $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est :

- elliptique s'il existe $\alpha \in \mathbb{D}$ tel que $\varphi(\alpha) = \alpha$;
- un automorphisme si $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est bijective.

Question : Quid des automorphismes elliptiques ?

On dit que $\varphi\ :\ \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est :

- elliptique s'il existe $\alpha \in \mathbb{D}$ tel que $\varphi(\alpha) = \alpha$;
- un automorphisme si $\varphi\ :\ \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est bijective.

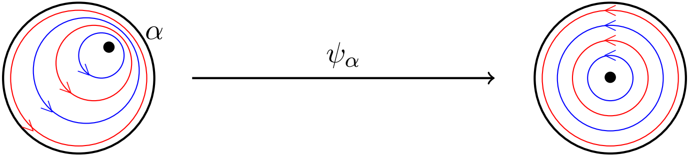
Un automorphisme elliptique est conjugé à une rotation.

Question : Quid des automorphismes elliptiques ?

On dit que $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est :

- elliptique s'il existe $\alpha \in \mathbb{D}$ tel que $\varphi(\alpha) = \alpha$;
- un automorphisme si $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est bijective.

Un automorphisme elliptique est conjugé à une rotation.



Avec $\psi_\alpha(z) = \psi_\alpha^{-1}(z) = \dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$.

Le problème étudié

Pour étudier le cas des automorphismes elliptiques, on peut se restreindre au cas des rotations !

Le problème étudié

Pour étudier le cas des automorphismes elliptiques, on peut se restreindre au cas des rotations !

Soit $\beta = e^{i\pi\theta} \in \mathbb{T}$. Soit $\varphi \ : \ z \mapsto \beta z$.
Soit $m \ : \ \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorphe.

Le problème étudié

Pour étudier le cas des automorphismes elliptiques, on peut se restreindre au cas des rotations !

Soit $\beta = e^{i\pi\theta} \in \mathbb{T}$. Soit $\varphi \ : \ z \mapsto \beta z$.
Soit $m \ : \ \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorphe.
Nous étudions les opérateurs de la forme

$$T_{m,\varphi} \ : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \\ f & \longmapsto & (z \mapsto m(z) \ f(\beta z)) \end{array} \right.$$

Le problème étudié

Pour étudier le cas des automorphismes elliptiques, on peut se restreindre au cas des rotations !

Soit $\beta = e^{i\pi\theta} \in \mathbb{T}$. Soit $\varphi \ : \ z \mapsto \beta z$.
Soit $m \ : \ \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorphe.
Nous étudions les opérateurs de la forme

$$T_{m,\varphi} \ : \ \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \\ f & \longmapsto & (z \mapsto m(z)\ f(\beta z)) \end{array} \right.$$

But : Étudier le spectre ponctuel et le spectre

Nous étudions les opérateurs de la forme

$$T_{m,\varphi} \ : \ \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \\ f & \longmapsto & (z \mapsto m(z)\ f(\beta z)) \end{array} \right.$$

But : Étudier le spectre ponctuel et le spectre

Rappel :

Nous étudions les opérateurs de la forme

$$T_{m,\varphi} \ : \ \begin{cases} \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \\ f & \longmapsto & (z \mapsto m(z)\ f(\beta z)) \end{cases}$$

But : Étudier le spectre ponctuel et le spectre

Rappel :

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} | (T - \lambda \, \mathrm{Id}) \text{ non inversible}\}$$

Nous étudions les opérateurs de la forme

$$T_{m,\varphi} \; : \; \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \\ f & \longmapsto & (z \mapsto m(z)\ f(\beta z)) \end{array} \right.$$

But : Étudier le spectre ponctuel et le spectre

Rappel :

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} | (T - \lambda \, \mathrm{Id}) \text{ non inversible}\}$$

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} | (T - \lambda \, \mathrm{Id}) \text{ non injectif}\}$$

Plan

Critère sur le symbole

On a $\varphi(z) = e^{i\pi\theta} z = \beta\, z$.

Critère sur le symbole

On a $\varphi(z) = e^{i\pi\theta} z = \beta\, z$.

Théorème

L'un des deux cas mutuellement exclusifs suivants échoit nécessairement.

Critère sur le symbole

On a $\varphi(z) = e^{i\pi\theta} z = \beta\, z$.

Théorème

L'un des deux cas mutuellement exclusifs suivants échoit nécessairement.

1. *Si $\theta \in \mathbb{Q}$: alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\beta^N = 1$ et $\beta, \beta^2, \cdots, \beta^{N-1} \neq 1$.*
   Dans ce cas, $\{\beta^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est fini.

Critère sur le symbole

On a $\varphi(z) = e^{i\pi\theta} z = \beta\, z$.

Théorème

L'un des deux cas mutuellement exclusifs suivants échoit nécessairement.

1. *Si $\theta \in \mathbb{Q}$: alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\beta^N = 1$ et $\beta, \beta^2, \cdots, \beta^{N-1} \neq 1$.*
   Dans ce cas, $\{\beta^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est fini.
2. *Si $\theta \notin \mathbb{Q}$: alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta^n \neq 1$.*
   Dans ce cas, $\{\beta^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est infini et dense dans $\mathbb{T}$.

Critère sur le symbole

On a $\varphi(z) = e^{i\pi\theta} z = \beta\, z$.

Théorème

L'un des deux cas mutuellement exclusifs suivants échoit nécessairement.

1. *Si $\theta \in \mathbb{Q}$: alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\beta^N = 1$ et $\beta, \beta^2, \cdots, \beta^{N-1} \neq 1$.*
   Dans ce cas, $\{\beta^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est fini.
2. *Si $\theta \notin \mathbb{Q}$: alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta^n \neq 1$.*
   Dans ce cas, $\{\beta^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est infini et dense dans $\mathbb{T}$.

1er critère : La rationnalité ou non de θ influence fortement les propriétés spectrales de $T_{m,\varphi}$.

Plan

Critère sur le poids

Question : À quelle condition $T_{m,\varphi}$ est-il inversible ? (ie $0 \in \sigma(T)$?)

Critère sur le poids

Question : À quelle condition $T_{m,\varphi}$ est-il inversible ? (ie $0 \in \sigma(T)$?)

Si $T_{m,\varphi}$ est inversible, on peut chercher son inverse sous la forme d'un opérateur de composition pondéré :

$$T_{m,\varphi}^{-1}(f)(z) = w(z) \times f(\psi(z)).$$

Critère sur le poids

Question : À quelle condition $T_{m,\varphi}$ est-il inversible ? (ie $0 \in \sigma(T)$?)

Si $T_{m,\varphi}$ est inversible, on peut chercher son inverse sous la forme d'un opérateur de composition pondéré :

$$T_{m,\varphi}^{-1}(f)(z) = w(z) \times f(\psi(z)).$$

$$T_{m,\varphi}^{-1}(T_{m,\varphi}(f))(z) \quad = \quad w(z) T_{m,\varphi}(f)(\psi(z))$$

Critère sur le poids

<u>Question :</u> À quelle condition $T_{m,\varphi}$ est-il inversible ? (ie $0 \in \sigma(T)$?)

Si $T_{m,\varphi}$ est inversible, on peut chercher son inverse sous la forme d'un opérateur de composition pondéré :

$$T_{m,\varphi}^{-1}(f)(z) = w(z) \times f(\psi(z)).$$

$$\begin{aligned} T_{m,\varphi}^{-1}(T_{m,\varphi}(f))(z) &= w(z)T_{m,\varphi}(f)(\psi(z)) \\ f(z) &= w(z)m(\psi(z)) \times f(\beta\psi(z)) \end{aligned}$$

Critère sur le poids

<u>Question :</u> À quelle condition $T_{m,\varphi}$ est-il inversible ? (ie $0 \in \sigma(T)$?)

Si $T_{m,\varphi}$ est inversible, on peut chercher son inverse sous la forme d'un opérateur de composition pondéré :

$$T_{m,\varphi}^{-1}(f)(z) = w(z) \times f(\psi(z)).$$

$$\begin{array}{rcl} T_{m,\varphi}^{-1}(T_{m,\varphi}(f))(z) & = & w(z)T_{m,\varphi}(f)(\psi(z)) \\ f(z) & = & w(z)m(\psi(z)) \times f(\beta\psi(z)) \end{array}$$

On en tire que $\psi(z) = \overline{\beta}z$,

Critère sur le poids

Question : À quelle condition $T_{m,\varphi}$ est-il inversible ? (ie $0 \in \sigma(T)$?)

Si $T_{m,\varphi}$ est inversible, on peut chercher son inverse sous la forme d'un opérateur de composition pondéré :

$$T_{m,\varphi}^{-1}(f)(z) = w(z) \times f(\psi(z)).$$

$$\begin{aligned} T_{m,\varphi}^{-1}(T_{m,\varphi}(f))(z) &= w(z)T_{m,\varphi}(f)(\psi(z)) \\ f(z) &= w(z)m(\psi(z)) \times f(\beta\psi(z)) \end{aligned}$$

On en tire que $\psi(z) = \bar{\beta}z$, puis que $w(z) = \dfrac{1}{m(\bar{\beta}z)}$.

Critère sur le poids

Question : À quelle condition $T_{m,\varphi}$ est-il inversible ? (ie $0 \in \sigma(T)$?)

Si $T_{m,\varphi}$ est inversible, on peut chercher son inverse sous la forme d'un opérateur de composition pondéré :

$$T_{m,\varphi}^{-1}(f)(z) = w(z) \times f(\psi(z)).$$

$$\begin{aligned} T_{m,\varphi}^{-1}(T_{m,\varphi}(f))(z) &= w(z)T_{m,\varphi}(f)(\psi(z)) \\ f(z) &= w(z)m(\psi(z)) \times f(\beta\psi(z)) \end{aligned}$$

On en tire que $\psi(z) = \bar{\beta}z$, puis que $w(z) = \dfrac{1}{m(\bar{\beta}z)}$.

2e critère : $0 \in \sigma(T)$ si et seulement s'il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $m(z_0) = 0$

Plan

1. Introduction et cadre général
2. Deux critères importants
   - Critère sur le symbole φ
   - Critère sur le poids m
3. Résultats principaux
   - Cas des rotations périodiques
   - Cas des rotations apériodiques

Spectre

Pour $\beta^N = 1$, calculons

Spectre

Pour $\beta^N = 1$, calculons

$$T^2(f)(z) \quad = \quad m(z) \times m(\beta z) \times f(\beta^2 z)$$

Spectre

Pour $\beta^N = 1$, calculons

$$\begin{aligned} T^2(f)(z) &= m(z) \times m(\beta z) \times f(\beta^2 z) \\ T^3(f)(z) &= m(z) \times m(\beta z) \times m(\beta^2 z) \times f(\beta^3 z) \end{aligned}$$

Spectre

Pour $\beta^N = 1$, calculons

$$\begin{aligned} T^2(f)(z) &= m(z) \times m(\beta z) \times f(\beta^2 z) \\ T^3(f)(z) &= m(z) \times m(\beta z) \times m(\beta^2 z) \times f(\beta^3 z) \\ T^N(f)(z) &= m(z) \times m(\beta z) \times \cdots \times m(\beta^{N-1} z) \times f(\beta^N z) \end{aligned}$$

Spectre

Pour $\beta^N = 1$, calculons

$$\begin{aligned}
T^2(f)(z) &= m(z) \times m(\beta z) \times f(\beta^2 z) \\
T^3(f)(z) &= m(z) \times m(\beta z) \times m(\beta^2 z) \times f(\beta^3 z) \\
T^N(f)(z) &= m(z) \times m(\beta z) \times \cdots \times m(\beta^{N-1} z) \times f(\beta^N z) \\
&= \underbrace{m(z) \times m(\beta z) \times \cdots \times m(\beta^{N-1} z)}_{:= m_N(z)} f(z)
\end{aligned}$$

Spectre

Pour $\beta^N = 1$, calculons

$$\begin{aligned}
T^2(f)(z) &= m(z) \times m(\beta z) \times f(\beta^2 z) \\
T^3(f)(z) &= m(z) \times m(\beta z) \times m(\beta^2 z) \times f(\beta^3 z) \\
T^N(f)(z) &= m(z) \times m(\beta z) \times \cdots \times m(\beta^{N-1} z) \times f(\beta^N z) \\
&= \underbrace{m(z) \times m(\beta z) \times \cdots \times m(\beta^{N-1} z)}_{:= m_N(z)} f(z)
\end{aligned}$$

T^N est un opérateur de multiplication. Son spectre est bien connu.

Spectre

Pour $\beta^N = 1$, calculons

$$
\begin{aligned}
T^2(f)(z) &= m(z) \times m(\beta z) \times f(\beta^2 z) \\
T^3(f)(z) &= m(z) \times m(\beta z) \times m(\beta^2 z) \times f(\beta^3 z) \\
T^N(f)(z) &= m(z) \times m(\beta z) \times \cdots \times m(\beta^{N-1} z) \times f(\beta^N z) \\
&= \underbrace{m(z) \times m(\beta z) \times \cdots \times m(\beta^{N-1} z)}_{:= m_N(z)} f(z)
\end{aligned}
$$

T^N est un opérateur de multiplication. Son spectre est bien connu.

Théorème

$$\sigma(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \lambda^N \in m_N(\mathbb{D}) \right\}.$$

Spectre ponctuel : un exemple

Spectre ponctuel : un exemple

Prenons $\beta = i$.

Spectre ponctuel : un exemple

Prenons $\beta = i$.

À quelle condition sur m peut-on avoir $\sigma_p(T) \neq \emptyset$?

Spectre ponctuel : un exemple

Prenons $\beta = i$.

À quelle condition sur m peut-on avoir $\sigma_p(T) \neq \emptyset$?

Prenons $\lambda \neq 0$ et f tels que $T(f) = \lambda f$.

Spectre ponctuel : un exemple

Prenons $\beta = i$.

À quelle condition sur m peut-on avoir $\sigma_p(T) \neq \emptyset$?

Prenons $\lambda \neq 0$ et f tels que $T(f) = \lambda f$. Alors,

$$T^4(f)(z) = \lambda^4 f(z) = \underbrace{m(z) \times m(iz) \times m(i^2 z) \times m(i^3 z)}_{:= m_4(z)} f(z)$$

Spectre ponctuel : un exemple

Prenons $\beta = i$.

À quelle condition sur m peut-on avoir $\sigma_p(T) \neq \emptyset$?

Prenons $\lambda \neq 0$ et f tels que $T(f) = \lambda f$. Alors,

$$T^4(f)(z) = \lambda^4 f(z) = \underbrace{m(z) \times m(iz) \times m(i^2 z) \times m(i^3 z)}_{:=m_4(z)} f(z)$$

m_4 est constante non nulle, donc $m_4 = \exp(\widetilde{m_4})$ avec $\widetilde{m_4}$ constante.

Spectre ponctuel : un exemple

Prenons $\beta = i$.

À quelle condition sur m peut-on avoir $\sigma_p(T) \neq \emptyset$?

Prenons $\lambda \neq 0$ et f tels que $T(f) = \lambda f$. Alors,

$$T^4(f)(z) = \lambda^4 f(z) = \underbrace{m(z) \times m(iz) \times m(i^2 z) \times m(i^3 z)}_{:= m_4(z)} f(z)$$

m_4 est constante non nulle, donc $m_4 = \exp(\widetilde{m_4})$ avec $\widetilde{m_4}$ constante.
De plus, m ne s'annule pas : on peut écrire $m = \exp(\widetilde{m})$.

Spectre ponctuel : un exemple

Prenons $\beta = i$.

À quelle condition sur m peut-on avoir $\sigma_p(T) \neq \emptyset$?

Prenons $\lambda \neq 0$ et f tels que $T(f) = \lambda f$. Alors,

$$T^4(f)(z) = \lambda^4 f(z) = \underbrace{m(z) \times m(iz) \times m(i^2 z) \times m(i^3 z)}_{:=m_4(z)} f(z)$$

m_4 est constante non nulle, donc $m_4 = \exp(\widetilde{m_4})$ avec $\widetilde{m_4}$ constante.
De plus, m ne s'annule pas : on peut écrire $m = \exp(\widetilde{m})$.

$$\widetilde{m_4}(z) = \sum_{n \geqslant 0} \widehat{\widetilde{m}(n)} \underbrace{\left(1 + i^n + i^{2n} + i^{3n}\right)}_{=0 \text{ si } n \notin 4\mathbb{N}} z^n = cste.$$

Spectre ponctuel : un exemple

Prenons $\beta = i$.
À quelle condition sur m peut-on avoir $\sigma_p(T) \neq \emptyset$?
Prenons $\lambda \neq 0$ et f tels que $T(f) = \lambda f$. Alors,

$$T^4(f)(z) = \lambda^4 f(z) = \underbrace{m(z) \times m(iz) \times m(i^2 z) \times m(i^3 z)}_{:=m_4(z)} f(z)$$

m_4 est constante non nulle, donc $m_4 = \exp(\widetilde{m_4})$ avec $\widetilde{m_4}$ constante.
De plus, m ne s'annule pas : on peut écrire $m = \exp(\widetilde{m})$.

$$\widetilde{m_4}(z) = \sum_{n \geqslant 0} \widehat{\widetilde{m}(n)} \underbrace{\left(1 + i^n + i^{2n} + i^{3n}\right)}_{=0 \text{ si } n \notin 4\mathbb{N}} z^n = cste.$$

On a donc $\widehat{\widetilde{m}(n)} = 0$ si $n \in 4\mathbb{N}^*$,

Spectre ponctuel : un exemple

Prenons $\beta = i$.

À quelle condition sur m peut-on avoir $\sigma_p(T) \neq \emptyset$?

Prenons $\lambda \neq 0$ et f tels que $T(f) = \lambda f$. Alors,

$$T^4(f)(z) = \lambda^4 f(z) = \underbrace{m(z) \times m(iz) \times m(i^2 z) \times m(i^3 z)}_{:=m_4(z)} f(z)$$

m_4 est constante non nulle, donc $m_4 = \exp(\widetilde{m_4})$ avec $\widetilde{m_4}$ constante.
De plus, m ne s'annule pas : on peut écrire $m = \exp(\widetilde{m})$.

$$\widetilde{m_4}(z) = \sum_{n \geqslant 0} \widehat{\widetilde{m}(n)} \underbrace{\left(1 + i^n + i^{2n} + i^{3n}\right)}_{=0 \text{ si } n \notin 4\mathbb{N}} z^n = cste.$$

On a donc $\widehat{\widetilde{m}(n)} = 0$ si $n \in 4\mathbb{N}^*$, c'est-à-dire

$$\widetilde{m}(z) = a_0 + z f_1(z^4) + z^2 f_2(z^4) + z^3 f_3(z^4).$$

Spectre ponctuel : cas général

On a $\beta, \beta^2, \cdots, \beta^{N-1} \neq 1$ mais $\beta^N = 1$.

Spectre ponctuel : cas général

On a $\beta, \beta^2, \cdots, \beta^{N-1} \neq 1$ mais $\beta^N = 1$.

Théorème

1. *S'il existe* $a_0 \in \mathbb{C}$ *et* $f_1, \cdots, f_{N-1} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *telles que*

$$m(z) = \exp\left(a_0 + z f_1(z^N) + \cdots + z^{N-1} f_{N-1}(z^N)\right),$$

Spectre ponctuel : cas général

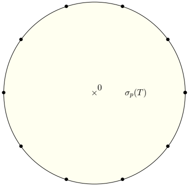
On a $\beta, \beta^2, \cdots, \beta^{N-1} \neq 1$ mais $\beta^N = 1$.

Théorème

1. *S'il existe* $a_0 \in \mathbb{C}$ *et* $f_1, \cdots, f_{N-1} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *telles que*

$$m(z) = \exp\left(a_0 + z f_1(z^N) + \cdots + z^{N-1} f_{N-1}(z^N)\right),$$

alors, $\sigma_p(T) = \left\{ m(0)\beta^k \;\middle|\; k = 1, \cdots, N \right\}$ *et les sous-espaces propres sont tous de dimension infinie.*



Théorème

1. *S'il existe* $a_0 \in \mathbb{C}$ *et* $f_1, \cdots, f_{N-1} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *telles que*

$$m(z) = \exp\left(a_0 + z f_1(z^N) + \cdots + z^{N-1} f_{N-1}(z^N)\right),$$

alors, $\sigma_p(T) \neq \emptyset$.

Théorème

1. *S'il existe* $a_0 \in \mathbb{C}$ *et* $f_1, \cdots, f_{N-1} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *telles que*

$$m(z) = \exp\left(a_0 + z f_1(z^N) + \cdots + z^{N-1} f_{N-1}(z^N)\right),$$

alors, $\sigma_p(T) \neq \emptyset$.

2. *Dans tous les autres cas,* $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Théorème

1. *S'il existe* $a_0 \in \mathbb{C}$ *et* $f_1, \cdots, f_{N-1} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *telles que*

$$m(z) = \exp\left(a_0 + z f_1(z^N) + \cdots + z^{N-1} f_{N-1}(z^N)\right),$$

alors, $\sigma_p(T) \neq \emptyset$.

2. *Dans tous les autres cas,* $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Remarque : On dispose d'une description "explicite" des sous-espaces propres.

Plan

Spectre ponctuel

Les techniques de preuve sont similaires au cas périodique.

Spectre ponctuel

Les techniques de preuve sont similaires au cas périodique.

Théorème

1. *S'il existe* $\widetilde{m} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *telle que*

$$m(z) = \exp\left(\widetilde{m}(z)\right) \ \text{avec} \ \limsup_{n\to+\infty}\left(\frac{\left|\widehat{\widetilde{m}(n)}\right|}{|1-\beta^n|}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant 1,$$

Spectre ponctuel

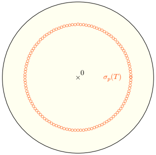
Les techniques de preuve sont similaires au cas périodique.

Théorème

1. *S'il existe* $\widetilde{m} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *telle que*

$$m(z) = \exp\left(\widetilde{m}(z)\right) \text{ avec } \limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{\left|\widehat{\widetilde{m}(n)}\right|}{|1-\beta^n|}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant 1,$$

Alors, $\sigma_p(T) = \left\{ m(0)\beta^k \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$ *et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.*



Théorème

1. *S'il existe* $\widetilde{m} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *telle que*

$$m(z) = \exp\left(\widetilde{m}(z)\right) \ \text{ avec } \limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{\left|\widehat{\widetilde{m}(n)}\right|}{|1-\beta^n|} \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant 1,$$

alors $\sigma_p(T) \neq \emptyset$.

Théorème

1. *S'il existe* $\widetilde{m} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *telle que*

$$m(z) = \exp\left(\widetilde{m}(z)\right) \ \textit{avec} \ \limsup_{n \to +\infty} \left(\frac{\left|\widehat{\widetilde{m}(n)}\right|}{|1 - \beta^n|} \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant 1,$$

   alors $\sigma_p(T) \neq \emptyset$.

2. *Dans tous les autres cas,* $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Spectre de Waelbroeck

Définition

Spectre de Waelbroeck

Définition

1. *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$. *On dit que* $\lambda \in \rho_W(T)$ *si :*

Spectre de Waelbroeck

Définition

1. *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$. *On dit que* $\lambda \in \rho_W(T)$ *si :*
   - $\lambda \in \rho(T)$;

Spectre de Waelbroeck

Définition

1. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On dit que $\lambda \in \rho_W(T)$ si :*
   - $\lambda \in \rho(T)$;
   - *il existe $\delta > 0$ tel que $\overline{D(\lambda;\delta)} \subset \rho(T)$;*

Spectre de Waelbroeck

Définition

1. *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$. *On dit que* $\lambda \in \rho_W(T)$ *si :*
   - $\lambda \in \rho(T)$;
   - *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\overline{D(\lambda;\delta)} \subset \rho(T)$;
   - *pour toute* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *et pour tout* $0 < r < 1$,
     $\sup\limits_{|\mu-\lambda|\leqslant\delta} \left\|(T - \mu\,\mathrm{Id})^{-1}(f)\right\|_{\infty, r\bar{\mathbb{D}}} < +\infty.$

Spectre de Waelbroeck

Définition

1. *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$. *On dit que* $\lambda \in \rho_W(T)$ *si :*
   - $\lambda \in \rho(T)$;
   - *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\overline{D(\lambda;\delta)} \subset \rho(T)$;
   - *pour toute* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *et pour tout* $0 < r < 1$, $\sup\limits_{|\mu-\lambda|\leqslant\delta} \left\|(T-\mu\,\mathrm{Id})^{-1}(f)\right\|_{\infty,r\bar{\mathbb{D}}} < +\infty$.
2. *On dit que* $\lambda \in \sigma_W(T)$ *quand* $\lambda \notin \rho_W(T)$.

Spectre de Waelbroeck

Définition

1. *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$. *On dit que* $\lambda \in \rho_W(T)$ *si :*
   - $\lambda \in \rho(T)$;
   - *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\overline{D(\lambda;\delta)} \subset \rho(T)$;
   - *pour toute* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *et pour tout* $0 < r < 1$,
     $$\sup_{|\mu-\lambda|\leqslant\delta} \left\|(T-\mu\,\mathrm{Id})^{-1}(f)\right\|_{\infty,r\bar{\mathbb{D}}} < +\infty.$$
2. *On dit que* $\lambda \in \sigma_W(T)$ *quand* $\lambda \notin \rho_W(T)$.

Le spectre de Waelbroeck est la "bonne" notion de spectre dans un espace de Fréchet :

Spectre de Waelbroeck

Définition

1. *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$. *On dit que* $\lambda \in \rho_W(T)$ *si :*
   - $\lambda \in \rho(T)$;
   - *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\overline{D(\lambda;\delta)} \subset \rho(T)$;
   - *pour toute* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *et pour tout* $0 < r < 1$,
     $$\sup_{|\mu-\lambda|\leqslant\delta} \left\|(T-\mu\,\mathrm{Id})^{-1}(f)\right\|_{\infty,r\bar{\mathbb{D}}} < +\infty.$$
2. *On dit que* $\lambda \in \sigma_W(T)$ *quand* $\lambda \notin \rho_W(T)$.

Le spectre de Waelbroeck est la "bonne" notion de spectre dans un espace de Fréchet :

- il est toujours fermé

Spectre de Waelbroeck

Définition

1. *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$. *On dit que* $\lambda \in \rho_W(T)$ *si :*
   - $\lambda \in \rho(T)$;
   - *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\overline{D(\lambda;\delta)} \subset \rho(T)$;
   - *pour toute* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *et pour tout* $0 < r < 1$,
     $$\sup_{|\mu-\lambda|\leqslant\delta} \left\|(T - \mu\,\mathrm{Id})^{-1}(f)\right\|_{\infty, r\bar{\mathbb{D}}} < +\infty.$$
2. *On dit que* $\lambda \in \sigma_W(T)$ *quand* $\lambda \notin \rho_W(T)$.

Le spectre de Waelbroeck est la "bonne" notion de spectre dans un espace de Fréchet :

- il est toujours fermé
- on peut définir des projections spectrales (comme si on était sur un Banach).

Interlude : l'algèbre du disque

On étudie ici un espace de Banach spécifique de fonctions holomorphes

$$A(\mathbb{D}) = \left\{ f \; : \; \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} \text{ continues telles que } f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \right\}.$$

Interlude : l'algèbre du disque

On étudie ici un espace de Banach spécifique de fonctions holomorphes

$$A(\mathbb{D}) = \left\{ f \ : \ \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} \text{ continues telles que } f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \right\}.$$

Lemme

On suppose que $m \in A(\mathbb{D})$ et que φ est apériodique.

Interlude : l'algèbre du disque

On étudie ici un espace de Banach spécifique de fonctions holomorphes

$$A(\mathbb{D}) = \left\{ f \ : \ \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} \text{ continues telles que } f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \right\}.$$

Lemme

On suppose que $m \in A(\mathbb{D})$ et que φ est apériodique.

1. *Si $m(z_0) = 0$ pour $z_0 \in \mathbb{D}$: alors $\sigma(T_{|A(\mathbb{D})})$ est un disque fermé de rayon*

$$M^* = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| m(e^{it}) \right| \, dt \right).$$

Interlude : l'algèbre du disque

On étudie ici un espace de Banach spécifique de fonctions holomorphes

$$A(\mathbb{D}) = \left\{ f \ : \ \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} \text{ continues telles que } f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \right\}.$$

Lemme

On suppose que $m \in A(\mathbb{D})$ et que φ est apériodique.

1. *Si $m(z_0) = 0$ pour $z_0 \in \mathbb{D}$: alors $\sigma(T_{|A(\mathbb{D})})$ est un disque fermé de rayon*
$$M^* = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| m(e^{it}) \right| \, dt \right).$$
2. *Si $m \neq 0$ sur $\mathbb{D}$: alors $\sigma(T_{|A(\mathbb{D})})$ est un cercle de rayon $|m(0)|$.*

Retour au spectre de Waelbroeck

Pour $0 < r < 1$, on a naturellement $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \hookrightarrow A(r\mathbb{D})$.

Retour au spectre de Waelbroeck

Pour $0 < r < 1$, on a naturellement $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \hookrightarrow A(r\mathbb{D})$.

D'une façon générale, $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \approx \bigcap_{0<r<1} A(r\mathbb{D})$.

Retour au spectre de Waelbroeck

Pour $0 < r < 1$, on a naturellement $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \hookrightarrow A(r\mathbb{D})$.

D'une façon générale, $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \approx \bigcap_{0<r<1} A(r\mathbb{D})$.

On peut donc utiliser les résultats sur $A(\mathbb{D})$ pour obtenir une caractérisation du spectre de Waelbroeck.

Retour au spectre de Waelbroeck

Pour $0 < r < 1$, on a naturellement $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \hookrightarrow A(r\mathbb{D})$.

D'une façon générale, $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \approx \bigcap_{0<r<1} A(r\mathbb{D})$.

On peut donc utiliser les résultats sur $A(\mathbb{D})$ pour obtenir une caractérisation du spectre de Waelbroeck.

Pour $0 < r < 1$, posons

$$M_r = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|m(re^{it})\right| \, dt\right)$$

Retour au spectre de Waelbroeck

Pour $0 < r < 1$, on a naturellement $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \hookrightarrow A(r\mathbb{D})$.

D'une façon générale, $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \approx \bigcap_{0<r<1} A(r\mathbb{D})$.

On peut donc utiliser les résultats sur $A(\mathbb{D})$ pour obtenir une caractérisation du spectre de Waelbroeck.

Pour $0 < r < 1$, posons

$$M_r = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|m(re^{it})\right| \, dt\right) \text{ et } M_1 = \sup_{0<r<1} M_r \in [0; +\infty].$$

Spectre de Waelbroeck et spectre

On a φ apériodique

Spectre de Waelbroeck et spectre

On a φ apériodique

Théorème

1. *Si $m \neq 0$ sur $\mathbb{D}$:*

Spectre de Waelbroeck et spectre

On a φ apériodique

Théorème

1. *Si $m \neq 0$ sur $\mathbb{D}$:*
   - $\sigma_W(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = |m(0)|\}$;

Spectre de Waelbroeck et spectre

On a φ apériodique

Théorème

1. *Si $m \neq 0$ sur $\mathbb{D}$:*
   - $\sigma_W(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = |m(0)|\}$;
   - $\{m(0)\beta^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = |m(0)|\}$.

Spectre de Waelbroeck et spectre

On a φ apériodique

Théorème

1. *Si $m \neq 0$ sur $\mathbb{D}$:*
   - $\sigma_W(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = |m(0)|\}$;
   - $\{m(0)\beta^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = |m(0)|\}$.
2. *Si $m(z_0) = 0$ pour $z_0 \in \mathbb{D}$:*

Spectre de Waelbroeck et spectre

On a φ apériodique

Théorème

1. *Si $m \neq 0$ sur $\mathbb{D}$:*
   - $\sigma_W(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = |m(0)|\}$;
   - $\{m(0)\beta^n \; |n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = |m(0)|\}$.
2. *Si $m(z_0) = 0$ pour $z_0 \in \mathbb{D}$:*
   - $\sigma_W(T) = \overline{D(0; M_1)}$;

Spectre de Waelbroeck et spectre

On a φ apériodique

Théorème

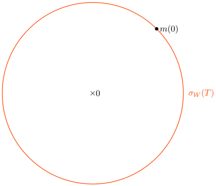
1. *Si $m \neq 0$ sur $\mathbb{D}$:*
   - $\sigma_W(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = |m(0)|\}$;
   - $\{m(0)\beta^n \; |n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = |m(0)|\}$.
2. *Si $m(z_0) = 0$ pour $z_0 \in \mathbb{D}$:*
   - $\sigma_W(T) = \overline{D(0; M_1)}$;
   - *pas d'information a priori sur $\sigma(T)$.*

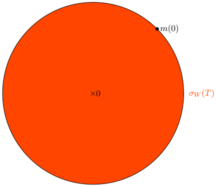
Spectre de Waelbroeck et spectre

On a φ apériodique

Théorème

1. *Si $m \neq 0$ sur $\mathbb{D}$:*
   - $\sigma_W(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = |m(0)|\}$;
   - $\{m(0)\beta^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = |m(0)|\}$.
2. *Si $m(z_0) = 0$ pour $z_0 \in \mathbb{D}$:*
   - $\sigma_W(T) = \overline{D(0; M_1)}$;
   - *pas d'information a priori sur $\sigma(T)$.*





Exemples

Exemples

Question 1 : A-t-on nécessairement $\sigma(T) = \sigma_W(T)$?

Exemples

Question 1 : A-t-on nécessairement $\sigma(T) = \sigma_W(T)$?

La réponse est NON : si θ est diophantien ("très irrationnel") et $m \equiv 1$ ($T = C_\varphi$ est un opérateur de composition),

Exemples

Question 1 : A-t-on nécessairement $\sigma(T) = \sigma_W(T)$?

La réponse est NON : si θ est diophantien ("très irrationnel") et $m \equiv 1$ ($T = C_\varphi$ est un opérateur de composition), alors

$$\{m(0)\beta^n \,|n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(T) \subset \left\{|m(0)|\, e^{i\pi x} \;\middle|\; x \notin \mathbb{Q}\right\} \cup \{1\}\,.$$

Exemples

Question 1 : A-t-on nécessairement $\sigma(T) = \sigma_W(T)$?

La réponse est NON : si θ est diophantien ("très irrationnel") et $m \equiv 1$ ($T = C_\varphi$ est un opérateur de composition), alors

$$\{m(0)\beta^n \,|n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(T) \subset \left\{ |m(0)|\, e^{i\pi x} \;\middle|\; x \notin \mathbb{Q} \right\} \cup \{1\}\,.$$

On a toujours $\sigma(T) \subset \sigma_W(T)$ et $\sigma_W(T)$ est fermé.

Exemples

Question 1 : A-t-on nécessairement $\sigma(T) = \sigma_W(T)$?

La réponse est NON : si θ est diophantien ("très irrationnel") et $m \equiv 1$ ($T = C_\varphi$ est un opérateur de composition), alors

$$\{m(0)\beta^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(T) \subset \left\{ |m(0)| e^{i\pi x} \;\middle|\; x \notin \mathbb{Q} \right\} \cup \{1\}.$$

On a toujours $\sigma(T) \subset \sigma_W(T)$ et $\sigma_W(T)$ est fermé.

Question 2 : Peut-on avoir $\overline{\sigma(T)} = \sigma_W(T)$?

Exemples

Question 1 : A-t-on nécessairement $\sigma(T) = \sigma_W(T)$?

La réponse est NON : si θ est diophantien ("très irrationnel") et $m \equiv 1$ ($T = C_\varphi$ est un opérateur de composition), alors

$$\{m(0)\beta^n \,|n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(T) \subset \left\{|m(0)|\, e^{i\pi x} \;\middle|\; x \notin \mathbb{Q}\right\} \cup \{1\}\,.$$

On a toujours $\sigma(T) \subset \sigma_W(T)$ et $\sigma_W(T)$ est fermé.

Question 2 : Peut-on avoir $\overline{\sigma(T)} = \sigma_W(T)$?

La réponse est OUI :

Exemples

Question 1 : A-t-on nécessairement $\sigma(T) = \sigma_W(T)$?

La réponse est NON : si θ est diophantien ("très irrationnel") et $m \equiv 1$ ($T = C_\varphi$ est un opérateur de composition), alors

$$\{m(0)\beta^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(T) \subset \left\{|m(0)| e^{i\pi x} \;\middle|\; x \notin \mathbb{Q}\right\} \cup \{1\}.$$

On a toujours $\sigma(T) \subset \sigma_W(T)$ et $\sigma_W(T)$ est fermé.

Question 2 : Peut-on avoir $\overline{\sigma(T)} = \sigma_W(T)$?

La réponse est OUI :

- si $m \equiv 1$ (donc $T = C_\varphi$ est un opérateur de composition)

Exemples

Question 1 : A-t-on nécessairement $\sigma(T) = \sigma_W(T)$?

La réponse est NON : si θ est diophantien ("très irrationnel") et $m \equiv 1$ ($T = C_\varphi$ est un opérateur de composition), alors

$$\{m(0)\beta^n \; |n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(T) \subset \left\{|m(0)|\, e^{i\pi x} \;\middle|\; x \notin \mathbb{Q}\right\} \cup \{1\}\,.$$

On a toujours $\sigma(T) \subset \sigma_W(T)$ et $\sigma_W(T)$ est fermé.

Question 2 : Peut-on avoir $\overline{\sigma(T)} = \sigma_W(T)$?

La réponse est OUI :

- si $m \equiv 1$ (donc $T = C_\varphi$ est un opérateur de composition)
- si $m(z) = z$: on a $\sigma(T) = \mathbb{D}$ et $\sigma_W(T) = \overline{\mathbb{D}}$.

Conclusion

Résumé des résultats

Conclusion

Résumé des résultats

	φ périodique	φ apériodique
σ_p	$= \left\{ m(0)\beta^k \,\middle|\, k = 1, \cdots, N \right\}$ ssi $m = e^{m_1}$ with $m_1 = [...]$ $= \emptyset$ sinon $+$ SEP explicites	$= \left\{ m(0)\beta^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$ ssi $m = e^{m_1}$ avec $m_1 = [...]$ $= \emptyset$ sinon $+$ SEP explicites
σ	$= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, \lambda^N \in m_N(\mathbb{D}) \right\}$	$\{\beta^n m(0)\} \subset \sigma \subset \|m(0)\|\mathbb{T}$ si $m \neq 0$ $\sigma \subset \sigma_W$ (toujours)
σ_W		$\sigma_W = \|m(0)\|\mathbb{T}$ si $m \neq 0$ $\sigma_W = \overline{D(0, M_1)}$ (M_1 explicite) sinon

Conclusion

Résumé des résultats

	φ périodique	φ apériodique
σ_p	$= \left\{ m(0)\beta^k \;\middle|\; k = 1, \cdots, N \right\}$ ssi $m = e^{m_1}$ with $m_1 = [...]$ $= \emptyset$ sinon $+$ SEP explicites	$= \left\{ m(0)\beta^k \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$ ssi $m = e^{m_1}$ avec $m_1 = [...]$ $= \emptyset$ sinon $+$ SEP explicites
σ	$= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \lambda^N \in m_N(\mathbb{D}) \right\}$	$\{\beta^n m(0)\} \subset \sigma \subset \lvert m(0)\rvert\mathbb{T}$ si $m \neq 0$ $\sigma \subset \sigma_W$ (toujours)
σ_W		$\sigma_W = \lvert m(0)\rvert\mathbb{T}$ si $m \neq 0$ $\sigma_W = \overline{D(0, M_1)}$ (M_1 explicite) sinon

Merci pour votre attention !